

Correction des exercices de TD

Correction de l'exercice 2.1

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = (1 \quad -2 \quad 3) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Le produit A^2 se réécrit AA . La matrice de gauche A a une colonne et la matrice de droite A a trois lignes. Le produit est donc impossible.
- Produit AA^T : La matrice de gauche A a une colonne et la matrice de droite A^T a une ligne. Le produit est donc possible et le résultat a trois lignes et trois colonnes.

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times (-2) & 1 \times 3 \\ -2 \times 1 & -2 \times (-2) & -2 \times 3 \\ 3 \times 1 & 3 \times (-2) & 3 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Produit $A^T A$: La matrice de gauche A^T a trois colonnes et la matrice de droite A a trois lignes. Le produit est donc possible et le résultat a une ligne et une colonne c'est-à-dire c'est un réel.

$$A^T A = (1 \quad -2 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-2) \times (-2) + 3 \times 3 = 14.$$

- Produit AB : la matrice A a une colonne et la matrice B a trois lignes donc le produit AB est impossible.
- Produit BA : la matrice B a trois colonnes et la matrice A a trois lignes donc le produit BA est possible et le résultat a trois lignes et une colonne.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 3 \\ 0 \times 1 + 2 \times (-2) + 3 \times 3 \\ 3 \times 1 + (-1) \times (-2) + (-1) \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 0 - 3 \\ 0 - 4 + 9 \\ 3 + 2 - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Produit $A^T B$: la matrice A^T a trois colonnes et la matrice B a trois lignes. Le produit est donc possible et le résultat a une ligne et trois colonnes. **Ici, pour des raisons de lisibilité, les colonnes sont séparées par des virgules.**

$$\begin{aligned} A^T B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 3, \quad 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-1), \quad 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1)) \\ &= (1 + 0 + 9, \quad 0 - 4 - 3, \quad -1 - 6 - 3) \\ &= (10, \quad -7, \quad -10). \end{aligned}$$

- Produit BA^T : la matrice B a trois colonnes et la matrice A^T a une ligne donc le produit BA^T est impossible.
- Produit B^2 : B est une matrice carrée donc on peut l'élever à n'importe quelle puissance y compris la puissance 2.

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 0 - 3 & 0 + 0 + 1 & -1 + 0 + 1 \\ 0 + 0 + 9 & 0 + 4 - 3 & 0 + 6 - 3 \\ 3 + 0 - 3 & 0 + 0 - 1 & -3 - 3 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.2

1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 A^2 + A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On a bien $A^2 + A - 2I_3 = 0$.

- 2) La relation $A^2 + A - 2I_3 = 0$ peut se réécrire $A^2 + A = 2I_3$. On en déduit la factorisation

$$A(A + I_3) = 2I_3$$

puis

$$A \left[\frac{1}{2}(A + I_3) \right] = I_3.$$

Ainsi, la matrice B cherchée est

$$B = \frac{1}{2}(A + I_3).$$

Remarque 1 : il aurait été erroné de faire la factorisation $A^2 + A = A(A + 1)$ car la matrice $A + 1$ n'est pas définie (on ne peut pas faire l'addition d'une matrice et d'un nombre réel). En revanche, la factorisation $A^2 + A = A(A + I_3)$ est bien correcte car on sait que la matrice A multipliée par l'identité donne encore A (en effet, $AI_3 = A$ et $I_3A = A$).

Remarque 2 : par convention, on écrit $\frac{1}{2}A$ plutôt que $\frac{A}{2}$.

Correction de l'exercice 2.3

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 10 - 6 & 10 + 5 - 0 & -6 + 5 + 3 \\ 4 + 2 + 2 & 10 + 1 + 0 & -6 + 1 - 1 \\ 4 + 0 - 2 & 10 + 0 - 0 & -6 + 0 + 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 2 \\ 8 & 11 & -6 \\ 2 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aussi que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 2 \\ 8 & 11 & -6 \\ 2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 55 & -11 \\ 26 & 51 & -7 \\ 14 & 20 & 9 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^3 - 2A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 50 & 55 & -11 \\ 26 & 51 & -7 \\ 14 & 20 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & -30 & -4 \\ -16 & -22 & 12 \\ -4 & -20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -25 & 15 \\ -10 & -5 & -5 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

soit

$$A^3 = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = 24 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 24I_3.$$

On en déduit que $n = 24$.

Correction de l'exercice 2.4

On vérifie que

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times a + 1 \times 0 & a \times 1 + 1 \times a \\ 0 \times a + a \times 0 & 0 \times 1 + a \times a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 + 0 & a^2 + 2a^2 \\ 0 + 0 & 0 + a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

En observant les expressions de A^2 et A^3 , on peut faire la conjecture suivante :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$